INDICE

12 gennaio 2009 pag 1
29 gennaio 2009 pag 4
19 febbraio 2009 pag 6
16 giugno 2009 pag 8
2 luglio 2009 pag 10
23 luglio 2009 pag 13
17 settembre 2009 pag 16
29 gennaio 2010 pag 18
18 febbraio 2010 - TESTO - pag 21
18 febbraio 2010 - SOLUZIONE - pag 22
10 giugno 2010 - SOLUZIONE - pag 24
10 giugno 2010 - TESTO - pag 26
3 luglio 2010 - TESTO - pag 27
3 luglio 2010 - SOLUZIONE - pag 28
22 luglio 2010 - TESTO - pag 30
22 luglio 2010 - SOLUZIONE - pag 32
13 febbraio 2011 - SOLUZIONE - Pag 33
10 febbraio 2011 - TESTO - pag 34
23 giugno 2011 - TESTO - pag 35
23 giugno 2011 - SOLUZIONE - pag 37
7 luglio 2011 - TESTO - pag 39
7 luglio 2011 - SOLUZIONE - pag 40
21 luglio 2011 - TESTO - pag 42
21 luglio 2011 - SOLUZIONE - pag 43
10 gennaio 2012 - TESTO - pag 45
15 gennaio 2012 - SOLUZIONE - pag 46
30 gennaio 2012 - TESTO - pag 48
30 gennaio 2012 - SOLUZIONE pag 49
13 febbraio 2012 - SOLUZIONE - pag 51
13 febbraio 2012 - TESTO - pag 53
5 giugno 2012 - TESTO - pag 54
5 giugno 2012 - SOLUZIONE - pag 55
16 luglio 2012 - SOLUZIONE - pag 57
25 giugno 2012 - SOLUZIONE - pag 59
16 luglio 2012 - TESTO - pag 60
25 giugno 2012 - TESTO - pag 61
8 gennaio 2013 - TESTO - pag 63
8 gennaio 2013 - SOLUZIONE pag 64

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

1 (1) PARTE A 12 gennaio 2009

① Data $f(x) = 3(\log(3x))$ Allora $f'(e)$ è uguale a:

A: NA B: $\log(3e)$ C: $\frac{3}{e}$ D: π E: e^3

→ $f'(x) = \frac{3}{3x} \cdot 3 = \frac{3}{x}$; $f'(e) = \frac{3}{e}$ risposta C

MASTER COPY
Tel. 050 831212
Cell. 388 9837745

② Il limite $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x^3+\cos x)}{3\log x}$ vale

A: NE B: $+\infty$ C: 1 D: 0 E: NA il sin è limitato, diviso per ∞ tende a 0

→ $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ applico la formula di de l'Hôpital

$$\frac{(3x^2 - \sin x)x}{(x^3+\cos x)3} = \frac{3x^3 - x\sin x}{3x^3+\cos x} = \frac{3x^3\left(1 - \frac{x\sin x}{3x^3}\right)}{3x^3\left(1 + \frac{\cos x}{3x^3}\right)} = 1$$

risposta C

③ Modulo e argomento del numero complesso $z = i^{43}$ sono

A: $(2, 43\pi)$ B: NA C: $(1, \frac{3}{2}\pi)$ D: $(1, \frac{4}{3}\pi)$ E: $(2, \frac{2}{3}\pi)$

→ Cerco modulo e argomento del numero complesso $\omega = i$, in modo che risulti $z = \omega^{43}$

$\omega = i$ $\rho = \sqrt{a^2+b^2} = 1$ $\begin{cases} \sin\theta = a/\rho = 1 \\ \cos\theta = b/\rho = 0 \end{cases}$



$\omega = (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

$z = \omega^{43} = 1^{43}\left(\cos\frac{43}{2}\pi + i\sin\frac{43}{2}\pi\right)$

$\frac{43}{2}$ = 21 resto 1 l'angolo torna ad essere $\frac{\pi}{2}$ ogni "4 giri"

21 : 4 = 5 resto 1 resto finale = 1+1 = 2 $\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3}{2}\pi$

⇒ $z = (\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi)$ risposta C

④ La retta tangente al grafico di $y(x) = \sin(2x)$ nel punto $x_0 = \frac{\pi}{4}$ vale

A: $1 + 2x - \frac{\pi}{2}$ B: $1 + x + x^2$ C: NA D: 1 E: $1 + \sin(2x)(x - \frac{\pi}{4})$

$\rightarrow x_0 = \left(\frac{\pi}{4}, \sin\left(\frac{2}{\cancel{4}_2}\pi\right)\right) = \left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$m = (\sin(2x))' = 2\cos(2x) \qquad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\frac{2}{\cancel{4}_2}\pi\right) = 0$

retta $\rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 1 = 0 \rightarrow y = 1$ risposta D

⑤ La funzione $f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ \cos(x) & x \geq 0 \end{cases}$ è continua e derivabile?

A: deriv. ma non cont B: è cont, & deriv C: né cont né deriv

D: NA E: cont ma non deriv.

→ Ogni funzione per essere derivabile deve essere continua (escludiamo la "A")

è continua se: $f(x) \begin{cases} 1 & x < 0 \\ \cos x & x \geq 0 \end{cases}$ $\lim_{x \to 0^-} 1$

$\lim_{x \to 0^+} \cos x = \cos 0 = 1$ è cont

è derivabile se: $f'(x) \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -\sin x & x \geq 0 \end{cases}$ $\lim_{x \to 0^-} = 0$

$\lim_{x \to 0^+} -\sin x = -\sin 0 = 0$ SÌ

risposta B

⑥ La serie a termini non negativi $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge per:

A: $3 < \alpha < \pi$ B: NA C: $\alpha > 1$ D: $\alpha > 0$ E: $\alpha \geq 1$

condizione necessaria $= \lim_{n \to \infty} \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) = \log(1) = 0$

ok, cond. soddisfatta

Il logaritmo converge se converge il suo argomento, da qui è una serie armonica. Ignorando l'1, risulta convergente se $\alpha > 1$. Risposta C

3 ⑦ Le soluzioni dell'equazione differenziale $x'(t) = \sin(t)$ sono:

A; $t + c_1 e^t + c_2 \sin(t)$ B; NE C; $-\cos(t) + c$ D; $\sin(t) + e^t + c$ E; NA

→ Dato che in questa equazione differenziale compare solo la derivata prima, è sufficiente integrare il $\sin(t)$.

$\int \sin t = -\cos t + c$ risposta C

⑧ Inf, min, max e sup dell'insieme

$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) < 0 \}$ sono:

A; $\{-\infty, NE, +\infty, NE\}$ B; NA C; $\{-\infty, NE, 2\pi, 2\pi\}$ D; $\{0, 0, \pi, \pi\}$

E; $\{-\pi, -\pi, +\infty, NE\}$

→ Il dominio è $\mathbb{R}$, il $\sin x < 0$ se $\pi < x < 2\pi$, ma sarebbe un errore considerare un solo "giro" del seno, che è una funzione oscillante che va da $-\infty$ a $+\infty$.

Pertanto inf = $-\infty$, max ne, sup = $+\infty$, min ne, risposta A

⑨ L'integrale $\int_{-1}^{2} |x| \, dx$ vale:

A; NA B; $\sqrt{2}$ C; 3/2 D; 0 E; 5/2

→ Dividiamo il dominio del valore assoluto:

se $x \geq 0$ $\int_0^2 x \, dx$, se $x \leq 0$ $\int_{-1}^{0} -x \, dx$

$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^0 = \frac{4}{2} - 0 - 0 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, risposta E

⑩ La funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x+1|$ è

A; surgettiva B; derivabile ovunque C; monotona D; NA E; crescente

→ • escludiamo la A poiché nessuna y negativa è immagine di una $x \in Dom$

• escludiamo la C perché $f(x)$ non è surgettiva

• escludiamo la E 

• escludiamo la B poiché $d'(|x+1|) = 1$ se $x \geq 0$ e -1 se $x < 0$, la derivata è discontinua in un punto, la risposta è quindi la D.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

2 PARTE A 29 GENNAIO 2009

① Data $f(x) = \sin(\pi x)$, $f'(\frac{1}{3})$ è uguale a

A: -1 B: NA C: $\frac{\pi}{3}$ D: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E: $\frac{\pi}{6}$

→ $f'(x) = \pi \cos \pi x$, $f'(\frac{1}{3}) = \pi \cos \frac{1}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ risposta D

② Inf, min, sup, max e sup dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : \log(x) \geq 1\}$ valgono:

A: NA B: $\{e, e, +\infty, NE\}$ C: $\{0, 0, \infty, NE\}$ D: $\{1, 1, +\infty, NE\}$ E: $\{e, me, 1\}$

→ $\log x \geq \log e$ $x \geq e$ $\inf = \min = e$; $\sup = +\infty$, max me, risposta B

③ La serie a termini non negativi $\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)^{\alpha}}$ converge per:

A: $\alpha \geq 1$ B: $\alpha > 0$ C: $3 < \alpha < \pi$ D: $\alpha > 1$ E: NA

→ È una serie armonica, $\frac{1}{n^{\alpha}}$ converge se $\alpha > 1$

sostituiamo $\alpha = 0$: $\frac{1}{(n+3)}$ → diverge

se $\alpha = 1$ → $\frac{1}{(n+3)(n+4)} = \frac{1}{n^2+7n+12}$, converge

quindi, dato che $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)^{\alpha}} = 0$, la serie converge per

$\alpha > 0$, risposta B

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

④ L'integrale $\int_{-1}^{3} |x^3| \, dx$ vale:

A: 20 B: $\frac{41}{2}$ C: $\frac{\sqrt{\pi}-1}{2}$ D: NA E: 0

→ $\int_{-1}^{0} -x^3 \, dx + \int_{0}^{3} x^3 dx = -\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{3} =$

$0 + \frac{1}{4} + \frac{81}{4} - 0 = \frac{82}{4} = \frac{41}{2}$, risposta B

⑤ Il limite $\lim_{x\to-\infty} \frac{x e^{2(x+1)}}{e^{3x}}$ vale:

A: 0 B: $-\infty$ C: 1 D: NA E: NE

→ $\frac{x e^{2x+2}}{e^{3x}} = \frac{x e^{2x} \cdot e^2}{e^{3x}} = x \cdot e^{2-x} = -\infty \cdot e^{2+\infty} =$

$-\infty \cdot \infty = -\infty$ risposta B